

LBRIS

We know
books

DANIEL VLĂDUCU
MÁRTA KÁSA

MEMORATOR DE MATEMATICĂ

pentru clasele IX-XII

Ediția a III-a

Editura Paralela 45

Redactare: Daniel Mitrăn

Tehnoredactare & pregătire de tipar: Marius Badea

Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României**VLĂDUCU, DANIEL****Memorator de matematică pentru clasele IX-XII / Daniel**

Vlăducu, Márta Kása. - Ed. a 3-a. - Pitești : Paralela 45, 2022

ISBN 978-973-47-3682-9

I. Kása, Márta

51

Copyright © Editura Paralela 45, 2022

Prezenta lucrare folosește denumiri ce constituie mărci înregistrate, iar conținutul este protejat de legislația privind dreptul de proprietate intelectuală.

CUPRINS

ALGEBRĂ.....	9
1. Formule de calcul prescurtat.....	9
2. Sume remarcabile	9
3. Modulul	10
4. Partea întreagă, partea fracționară.....	11
5. Inegalități remarcabile	11
6. Elemente de logică matematică, mulțimi	13
7. Inducție matematică, probleme simple de numărare	14
8. Puteri și radicali	14
9. Logaritmi	15
10. Progresii aritmetice, progresii geometrice.....	16
11. Elemente de combinatorică.....	17
12. Binomul lui Newton.....	18
13. Funcții, funcția de gradul I.....	18
14. Ecuația de gradul al II-lea	20
15. Funcția de gradul al II-lea	21
16. Funcții injective, surjective, bijective	24
17. Funcția putere, funcția radical, ecuații	24
18. Funcția exponențială, funcția logaritmică	25
19. Funcții trigonometrice.....	26
20. Matematici financiare	27
21. Elemente de statistică.....	28
22. Probabilitate	29
23. Variabile aleatoare	31
24. Numere complexe sub formă algebrică.....	31

25. Aplicații în geometria plană.....	33	6. Criterii de convergență/divergență a șirurilor	53
26. Forma trigonometrică a unui număr complex, operații, ecuații, aplicații.....	33	7. Operații cu șiruri convergente	54
27. Permutări	34	8. Cazuri de trecere la limită rezolvate	55
28. Determinanți	35	9. Cazuri de nedeterminare (exceptate)	57
29. Inversa unei matrice.....	35	10. Limite remarcabile de șiruri.....	57
30. Rangul unei matrice	36	II. LIMITE DE FUNCȚII	58
31. Sisteme liniare	36	1. Limita unei funcții într-un punct.....	58
32. Legi de compoziție.....	38	2. Limite laterale.....	58
33. Structuri algebrice.....	39	3. Limite remarcabile.....	59
34. Inele de polinoame.....	41	III. FUNCȚII CONTINUE	61
35. Polinoame cu coeficienți complecși.....	43	1. Noțiuni generale	61
TRIGONOMETRIE	45	2. Clase de funcții continue	61
1. Elemente de trigonometrie	45	3. Proprietățile funcțiilor continue	61
2. Formule trigonometrice	46	IV. FUNCȚII DERIVABILE.....	63
3. Aplicații ale trigonometriei și produsului scalar a doi vectori în geometria plană.....	48	1. Noțiuni generale	63
ANALIZĂ MATEMATICĂ.....	51	2. Clase de funcții derivabile	63
I. ȘIRURI.....	51	3. Reguli de derivare.....	64
1. Șiruri monotone	51	4. Derivata unei funcții compuse	64
2. Șiruri mărginite.....	51	5. Derivata unei funcții inverse.....	64
3. Limita unui șir	51	6. Derivatele funcțiilor elementare și compuse.....	65
4. Șiruri convergente	52	7. Studiul funcțiilor cu ajutorul derivatelor.....	67
5. Convergență și mărginire.....	53	Teorema lui Fermat	67
		Teorema lui Rolle	67
		Teorema lui Cauchy	67
		Teorema lui Lagrange	68
		Teorema lui Darboux	69

Regula lui l'Hospital	69	6. Formula Leibniz-Newton	82
8. Convexitate și concavitate. Puncte de inflexiune	70	7. Formula de medie	82
9. Puncte unghiulare și puncte de întoarcere	71	8. Formula de integrare prin părți	82
10. Asimptote	71	9. Formula schimbare de variabilă	83
Asimptote orizontale	71	10. Aplicații ale integralelor definite	83
Asimptote verticale	71		
Asimptote oblice	72	GEOMETRIE VECTORIALĂ ÎN PLAN ȘI ÎN SPAȚIU	85
V. PRIMITIVE	73	I. VECTORI LEGAȚI.....	85
1. Noțiuni generale	73	1. Noțiuni generale	85
2. Integrala nedefinită	73	Direcție.....	85
3. Clase de funcții care admit primitive	74	Sens.....	85
4. Integrare. Metode de integrare	74	Lungime	85
Metoda de integrare prin părți	74	2. Vectori legați echipolenți.....	86
Metoda schimbării de variabilă	75	3. Raportul în care un punct împarte un segment orientat.....	86
5. Primitive uzuale.....	75	II. VECTORI LIBERI.....	87
Primitivele funcțiilor elementare	75	1. Noțiuni generale	87
VI. INTEGRALE DEFINITE.....	78	2. Operații cu vectori liberi	87
1. Diviziuni.....	78	Adunarea vectorilor liberi	87
2. Sume Darboux, sume Riemann	79	Scăderea vectorilor liberi	88
3. Integrala definită.....	80	Înmulțirea unui vector liber cu un număr real	88
Funcții integrabile în sens Riemann	80	3. Vectorul de poziție	89
4. Clase de funcții integrabile	80	4. Vectori paraleli	90
5. Proprietăți ale integralelor definite	81	5. Lungimea unui vector liber în plan	90
Proprietatea de liniaritate	81	6. Produsul scalar a doi vectori liberi în plan.....	91
Proprietatea de monotonie.....	81	7. Lungimea unui vector liber în spațiu	92
Proprietăți ale integralei ca funcție de interval	82	8. Produsul scalar a doi vectori liberi în spațiu	92

GEOMETRIE ANALITICĂ ÎN PLAN ȘI ÎN SPAȚIU	93
REPER CARTEZIAN ÎN PLAN ȘI ÎN SPAȚIU	93

1. Reperul cartezian	93
2. Distanța dintre două puncte în plan	95

ALGEBRĂ

FORMULE DE CALCUL PRESCURTAT

- $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
- $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
- $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
- $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
- $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}), \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$
- $a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}), \forall n \in 2\mathbb{N} + 1$
- $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$
- $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)$ sau
- $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c) \cdot \frac{1}{2} \cdot ((a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2);$
- $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)((a + b + c)^2 - 3(ab + bc + ac));$
- $a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3 - 3(a + b)(b + c)(c + a).$

SUME REMARCABILE

- $\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

LIBRIS We know books

$$\bullet \sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\bullet \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$



MODULUL

Definiție: Modulul sau valoarea absolută a unui număr real este distanța, pe axa numerelor reale, dintre reprezentarea numărului și origine.

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases} \text{ și } |E(x)| = \begin{cases} E(x), & \text{dacă } E(x) \geq 0 \\ -E(x), & \text{dacă } E(x) < 0 \end{cases}, \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

expresie $E(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Proprietăți:

- $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R};$
- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$
- $|x| = |y| \Leftrightarrow x = \pm y;$
- $|x| < c, c > 0 \Leftrightarrow x \in (-c; c);$
- $|x| > c, c > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -c) \cup (c; \infty);$
- $||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|; \exists „=” \Leftrightarrow xy \geq 0$
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|;$
- $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}, y \neq 0;$

$$\bullet \min(a, b) = \frac{a+b-|a-b|}{2} \text{ și } \max(a, b) = \frac{a+b+|a-b|}{2}.$$



PARTEA ÎNTREAGĂ, PARTEA FRAȚIONARĂ

Definiții:

Partea întreagă a unui număr real x este cel mai mic număr întreg cel mult egal cu numărul x și se notează $[x]$.

Partea fracționară a lui x se notează $\{x\}$ și $\{x\} = x - [x]$.

Proprietăți:

- $[x] = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z};$
- $\{x\} = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z};$
- $[m+x] = m + [x], \forall m \in \mathbb{Z};$
- $\{m+x\} = \{x\}, \forall m \in \mathbb{Z};$
- $x-1 < [x] \leq x < [x]+1;$
- $|x| + \left[x + \frac{1}{n} \right] + \dots + \left[x + \frac{n-1}{n} \right] = [nx], \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2 \text{ (Hermite).}$



INEGALITĂȚI REMARCABILE

$$\bullet \text{ Dacă } a+b > 0, \text{ atunci } \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2.$$

$$\bullet x \cdot y \leq \frac{(x+y)^2}{4}, \forall x, y \in \mathbb{R};$$

• $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx, \forall x, y, z \in \mathbb{R};$
 • $3 \cdot (xy + yz + zx) \leq (x + y + z)^2 \leq 3 \cdot (x^2 + y^2 + z^2).$

Inegalitatea mediilor

(adevărată pentru numere strict pozitive)

$$\min(a_k) \leq m_h \leq m_g \leq m_a \leq m_p \leq \max(a_k), \text{ unde}$$

$$m_h = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \frac{n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}} \quad (\text{media armonică}),$$

$$m_g = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n a_k} \quad (\text{media geometrică}),$$

$$m_a = \frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots + p_n a_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = \frac{\sum_{k=1}^n a_k}{n} \quad (\text{media aritmetică}),$$

$$m_p = \sqrt[n]{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}} = \sqrt[n]{\frac{\sum_{k=1}^n a_k^2}{n}} \quad (\text{media pătratică}).$$

Inegalitatea Cauchy-Buniakovsky-Schwarz

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + \dots + a_n^2) \cdot (b_1^2 + \dots + b_n^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2$$

Inegalitatea lui Minkowski

$$\sqrt{(x+y)^2 + (a+b)^2} \leq \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{y^2 + b^2}$$

Inegalitatea lui Cebîșev

Dacă $(a_k)_{k \geq 1}, (b_k)_{k \geq 1}$ sunt două șiruri la fel ordonate, atunci

$$\sum_{k=1}^n a_k \cdot \sum_{k=1}^n b_k \leq n \cdot \sum_{k=1}^n (a_k \cdot b_k),$$

iar dacă $(a_k), (b_k)$ sunt două șiruri invers ordonate, atunci

$$\sum_{k=1}^n a_k \cdot \sum_{k=1}^n b_k \geq n \cdot \sum_{k=1}^n (a_k \cdot b_k).$$

Inegalitatea lui Bernoulli

$$(1 + \alpha)^r \geq 1 + r\alpha, \quad \forall \alpha, r \in \mathbb{R}, \alpha \geq -1, r \geq 0$$



ELEMENTE DE LOGICĂ MATEMATICĂ, MULȚIMI

• Se numește propoziție, în sensul logicii matematice, un enunț care, într-un context dat, este fie adevărat, fie fals.

Valoare de adevăr, tabele de adevăr

p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1	0
0	0	1	0	0	1	1

• Se numește predicat un enunț care depinde de una sau mai multe variabile și care devine propoziție oricum am înlocui variabilele cu valori alese dintr-o mulțime.